MINISTERE DE L'URBANISME
DU LOGEMENT ET DES TRANSPORTS

E.I.T.P.E. 1985

DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

- OPTION M -

(temps accordé : 4 heures)

Le candidat pourra, à condition de le signaler explicitement, admettre sans démonstration un résultat donné dans le texte afin de poursuivre la résolution des parties suivantes.

PREAMBULE - Dans tout le problème, $\mathcal{P}$ désignera le plan affine euclidien rapporté à deux axes orthonormés de coordonnées : x'Ox et y'Oy.

Un point M de $\mathcal{P}$, de coordonnées réelles x et y dans ces axes, sera appelé image du nombre complexe $z = x + i\,y$ et inversement le nombre complexe z sera l'affixe du point M.

Dans tout le problème, E désignera toujours un espace vectoriel de dimension finie sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, muni d'un produit scalaire hermitien ; le produit scalaire hermitien des vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sera noté $(\vec{x} \mid \vec{y})$ et c'est par rapport à sa variable $\vec{x}$ que cette forme sesquilinéaire sera considérée comme linéaire.

$\mathcal{L}(E)$ désignera l'algèbre des endomorphismes de l'espace vectoriel E.

Etant donné un endomorphisme u de l'espace vectoriel E doté de son produit scalaire hermitien, on admettra qu'il existe un unique endomorphisme

noté u* et appelé adjoint de u vérifiant pour tout couple de vecteurs $(\vec{x}, \vec{y})$, la relation :

$$(u(\vec{x}) \mid \vec{y}) = (\vec{x} \mid u^* (\vec{y}))$$

On appelle <u>hermitien</u> tout endomorphisme u de l'espace vectoriel E égal à son adjoint ; un endomorphisme hermitien u de E est donc tel que pour tout couple $(\vec{x}, \vec{y})$ de vecteurs de E on ait :

$$(u(\vec{x}) \mid \vec{y}) = (\vec{x} \mid u (\vec{y}))$$

<u>PARTIE I</u>

I.1 a et b désignent deux réels tels que $0 < b < a$.

$\mathcal{D}$ est l'ensemble des points M de $\mathcal{P}$ dont les coordonnées vérifient :

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \leqslant 0$$

A) Montrer que $\mathcal{D}$ est une partie convexe de $\mathcal{P}$; on rappelle qu'une partie non vide de $\mathcal{P}$ est dite convexe si elle contient le segment de droite $[M_1\ M_2]$ dès qu'elle contient les points M_1 et M_2.

B) $\mathcal{P}$ étant muni de la topologie déduite de sa distance euclidienne, montrer que l'ensemble des points frontières de $\mathcal{D}$ est une courbe simple qu'on reconnaîtra.

I.2 - A) b et c sont deux réels strictement positifs. On veut montrer que l'ensemble des images dans $\mathcal{P}$ des nombres complexes de la forme $c.\cos 2\theta + b.\sin 2\theta.e^{it}$, où (θ, t) décrit $\mathbb{R}^2$, est l'ensemble $\mathcal{D}$ du § I.1 - ci-dessus quand on pose $a = \sqrt{b^2 + c^2}$. Pour cela on propose la méthode suivante :

Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que le système (S)

$$(S) \quad \begin{cases} c.\cos 2\theta + b.\sin 2\theta.\cos t = x \\ b.\sin 2\theta.\sin t = y \end{cases}$$

des deux équations aux inconnues réelles θ et t ait des solutions est la

.../...

condition :

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \leqslant 0$$

On pourra utiliser le fait que deux nombres réels sont le cosinus et le sinus d'un même angle si et seulement si la somme de leurs carrés vaut + 1.

B) Quels sont les ensembles images dans $\mathcal{P}$ des nombres du § I.2 - A) dans chacun des 3 cas particuliers suivants :
(i) $b = 0$, $c > 0$; (ii) $b > 0$, $c = 0$; (iii) $b = c = 0$; vérifier directement dans ces trois cas que les ensembles images sont convexes.

PARTIE II

Dans cette partie II, l'espace vectoriel E est de dimension 2 sur le corps des complexes $\mathbb{C}$. S_1 désigne l'ensemble des vecteurs unitaires de E.

Etant donné un endomorphisme u de E, on désigne par $\mathcal{H}(u)$ la famille des nombres complexes $(u(\vec{x}) \mid \vec{x})$ lorsque $\vec{x}$ décrit S_1.

II.1 - A) Montrer que u a au moins un vecteur propre unitaire.

B) En déduire qu'il existe au moins une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est de la forme :

$$\begin{Vmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda' \end{Vmatrix}$$

II.2 Montrer que les vecteurs de S_1 sont les vecteurs de E dont les composantes scalaires dans la base $\mathcal{B}$ précédente sont du type $(\cos\theta.e^{i\alpha}, \sin\theta.e^{i\beta})$ avec (θ,α,β) dans $\mathbb{R}^3$.

II.3 Déduire des § II.1 et 2 précédents que $\mathcal{H}(u)$ est l'ensemble des nombres complexes, du type : $\frac{1}{2}(\lambda+\lambda') + \frac{1}{2}(\lambda-\lambda')\cos 2\theta + b.\sin 2\theta.e^{i\tau}$

où λ et λ' sont les valeurs propres de u, $2b = |\mu|$ et (θ,τ) decrit $\mathbb{R}^2$.

II.4 - A) On suppose que $|\mu| \neq 0$; en désignant par $(\mathcal{D})$, l'ensemble dans $\mathbb{C}$ des affixes des points de $\mathcal{D}$, montrer qu'on passe de $(\mathcal{D})$ à $\mathcal{H}(u)$ par une transformation affine du type $Z = s.z + t$ où s et t sont des nombres complexes qu'on calculera en fonction de c, λ et λ' . Donner la signification pour l'image dans $\mathcal{P}$ de $\mathcal{H}(u)$ de $\frac{1}{2}(\lambda+\lambda')$, λ , λ', $\frac{1}{2}|\lambda-\lambda'|$ et $\frac{1}{2}|\mu|$.

B) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur l'endomorphisme u et exprimant que l'image de $\mathcal{H}(u)$ est réduite dans $\mathcal{P}$ à un segment de droite.

PARTIE III

Dans cette partie III, on suppose que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension finie supérieure ou égale à deux ; la notation du produit scalaire hermitien, la signification de S_1, la signification de l'ensemble $\mathcal{H}(u)$ associé à un endomorphisme de E sont les mêmes que dans la partie II.

III.1 L et M étant deux sous espaces supplémentaires de l'espace vectoriel E, montrer que le projecteur de noyau M et d'image L est un endomorphisme hermitien (voir le préambule) si et seulement si M est le supplémentaire orthogonal de L.

III.2 L étant un sous-espace vectoriel de E et p le projecteur orthogonal de E sur L, on associe à tout endomorphisme u de E, un endomorphisme de L, noté $p \cdot u \mid L$ qui fait correspondre à un vecteur $\vec{x}$ de L, le vecteur $p \circ u(\vec{x})$ de L. Montrer que $\mathcal{H}(p \circ u \mid L) \subset \mathcal{H}(u)$.

III.3 - A) Etant donné un endomorphisme u de E, soient α et β deux nombres complexes différents de l'ensemble $\mathcal{H}(u)$, A et B les images de α et β dans $\mathcal{P}$ et enfin $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs unitaires de E tels que $\alpha = (u(\vec{a}) \mid \vec{a})$ et $\beta = (u(\vec{b}) \mid \vec{b})$.

En introduisant un plan vectoriel L contenant $\vec{a}$ et $\vec{b}$, montrer que le segment de droite [AB] est entièrement contenu dans l'image de $\mathcal{H}(p \circ u \mid L)$.

B) En déduire que pour tout endomorphisme u de E, l'image dans $\mathcal{P}$ de $\mathcal{H}(u)$ est une partie bornée convexe contenant les images des valeurs propres de u.

III.4 Donner les images dans $\mathcal{P}$ des ensembles $\mathcal{H}(u)$ dans chacun des trois cas suivants :

A) E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension finie supérieure ou égale à un et u un endomorphisme hermitien de E.

B) $E = \mathbb{C}^3$ est muni du produit scalaire hermitien naturel qui rend sa base canonique orthonormée et u est l'endomorphisme de matrice :

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$ dans cette base canonique.

On pourra chercher des vecteurs unitaires propres pour u.

C) E est le même espace que dans B) et u est l'endomorphisme de E de matrice :

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$ dans la base canonique.

On aura intérêt à utiliser des vecteurs unitaires de E dont les composantes (x, y, z) dans la base canonique sont $x = \sqrt{1 - r^2}.e^{i\alpha}$, $y = r.e^{i\beta}.\cos\theta$, $z = r.e^{i\gamma} \sin\theta$ avec $r \in [0,1]$ et $(\alpha,\beta,\gamma,\theta)$ dans $\mathbb{R}^4$.

PARTIE IV

$\mathcal{C}$ est une partie fermée convexe d'intérieur non vide de $\mathcal{P}$; on dit

que $\mathcal{C}$ présente un point anguleux en un point A de sa frontière si $\mathcal{C}$ est contenue dans un angle saillant de sommet A ; l'angle d'appui de $\mathcal{C}$ en A est l'intersection de tous les angles saillants de sommet A possédant la propriété de contenir $\mathcal{C}$. (On rappelle qu'un angle saillant de sommet A est l'intersection de deux demi-plans fermés de $\mathcal{P}$ dont les arêtes ne se coupent qu'en A).

On suppose que l'image dans $\mathcal{P}$ de l'ensemble $\mathcal{H}(u)$, associé à un endomorphisme u de l'espace vectoriel E de dimension finie, présente un point anguleux A en un point de sa frontière ; on admettra que $\mathcal{H}(u)$ est un ensemble fermé de $\mathbb{C}$. Soit $\vec{e}$ un vecteur unitaire de E tel que $(u(\vec{e}) \mid \vec{e}) = \alpha$, où α est l'affixe de A.

On désigne par H l'hyperplan de E orthogonal à $\vec{e}$; soit $\vec{h}$ un vecteur unitaire quelconque de H et soit p le projecteur orthogonal de E sur le plan vectoriel L engendré par $\vec{e}$ et $\vec{h}$; on pose $v = p \circ u|_L$.

IV.1 Montrer que si un sous-espace F de E est stable par u, le supplémentaire orthogonal G de F est stable par l'endomorphisme u^*, adjoint de u.

IV.2 Montrer que $(\vec{e}, \vec{h})$ est nécessairement une base orthonormée de diagonalisation de v et que H est stable par u.

IV.3 Montrer que H est stable par u^* adjoint de u ; en déduire que la droite vectorielle engendrée par $\vec{e}$ est stable par u et que $\alpha = (u(\vec{e}) \mid \vec{e})$ est une valeur propre de u.

IV.4 Montrer que pour tout endomorphisme u de E, l'image dans $\mathcal{P}$ de l'ensemble $\mathcal{H}(u)$ possède au plus un nombre fini de points anguleux.